牛客暑期 ACM 多校训练营

第 1 场 - ftiasch

牛客网
NOWCODER

Monotonic Matrix

考虑 01 和 12 的分界线

是 (n, 0) 到 (0, m) 的两条不相交（可重合）路径

平移其中一条变成 (n-1, -1) 到 (-1, m-1)

变成起点 (n, 0) 和 (n-1, -1)，终点 (0, m) 和 (-1, m-1) 的严格不相交路径

套 Lindström–Gessel–Viennot lemma

答案是 $C_{n+m, n}{}^{2} - C_{n+m, m-1} C_{n+m, n-1}$

Symmetric Matrix

把矩阵看成无向图的邻接矩阵，即要求所有点度为 2

设 $f(n)$ 表示 n 个点满足条件的图的数量

$f(n) = (n-1)\ f(n - 2) + \mathrm{sum}_{k < n - 2}(n-1)!\ f(k) / k! / 2$

设 $g(n) = \mathrm{sum}_{k < n - 2}(n-1)!\ f(k) / k! / 2$

则 $g(n) = (n - 1)\ g(n - 1) + (n-1)\ (n-2)\ \mathrm{f}(n - 3) / 2$

Fluorescent 2

设 X_i 表示灯 i 是否为亮

题目要求 $E[(\mathrm{sum}\ X_i)^3] = \mathrm{sum}_{i,j,k}\ \Pr[X_i X_j X_k]$

仅考虑 i, j, k 三列形成的矩阵 **A**

则 $\Pr[X_i X_j X_k] = 1 / 2^{\mathrm{rank}(\mathbf{A})}$

因为行秩 = 列秩，下面考虑列秩，同时忽略边界情况

枚举列 i，用 i 消其他列，复杂度 $O(nm^2)$

此时，列 j, k 有 2 种情况：

列 j 和列 k 完全相同，则秩为 2

列 j 和列 k 不完全相同，则秩为 3

因此，只需把消元后的列归类即可（hash or trie）

总复杂度 $O(nm^2)$

Two Graphs

直接 $n!$ 枚举可能的同构方案

Hash 去重即可

也可除以自同构的方案数

Removal

设 next(i, c) 表示位置 i 后第一个字符 c 的位置

$f(i, j)$ 表示当前匹配到 i，删了 j 个，不同的方案数

转移时枚举下一个字符 c，转移到

$f(\text{next}(i, c), j + \text{next}(i, c) - i)$

Sum of Maximum

转成计算 $\text{sum}_k\ \text{sum}_{\mathbf{x}}\ [\max\{\mathbf{x}\} > k]$

$= \text{sum}_k\ (a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n - \text{sum}_{\mathbf{x}}\ [\max\{\mathbf{x}\} \le k])$

$= \text{sum}_k\ (a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n - \text{sum}_{\mathbf{x}}\ [x_1 \le k][x_2 \le k]\ldots[x_n \le k])$

而 $[x \le k]$ 是个分两段的线性函数

所以后一项是个 n 段的关于 k 的 n 次多项式

每段拉格朗日插值即可

Steiner tree

求最小边数的 Dreyfus-Wagner 算法

设 $f(S, v)$ 表示集合 S 中的点到点 v 的最小边数

转移有 2 种：

固定 S，v 从相邻点转移，相当于根节点生长，复杂度 $O(2^k m)$

固定 v，S 从 $T + (S \setminus T)$ 转移，相当于节点分叉，复杂度 $O(3^k n)$

为了避免重复计数，约定如下：

只计算以节点 1 为根的有根树

T 和 $S \setminus T$ 合并时，保证 T 的最小值小于 $(S \setminus T)$ 的最小值

Longest Path

先算 down[u] 表示 u 向下的最长路，接着算 up[u]

子问题是要求形如

$\text{opt}[i] = \max_{j\,!=\,i} \text{down}[j] + (c[i] - c[j])^2$

可以按照 $c[i]$ 排序，从前往后从后往前各做一遍

经典的斜率优化，也可用李超树

Substrings

枚举 3!=6 种同构，把字符串复制 6 份拼接得到 *S*

用 SA/SAM/ST 求 *S* 的不同子串

可以发现：

只有 1 种字符的串被算了 3 次

其他串被算了 6 次

答案是 (不同子串数量 + 3 × 单一字符的串) / 6

Different Integers

离线按照 r 从小到大处理询问，考虑*没出现*的数字个数

假设 $r = \text{last}[x]$，那么当 $l < \text{first}[x]$ 时，x 没出现

用树状数组维护即可

Thanks

牛客网