OI 中的超现实数和不平等博弈问题

杜瑜皓

apiadu17a6@gmail.com

交叉信息研究院

2018 年 2 月 6 日

Example

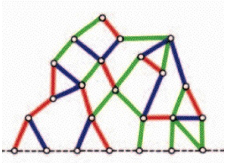
- 有 n 堆石子，第 i 堆石子都有 $a_i(a_i \leq 10^4)$ 个。我们将自然数划分成 A 和 B 两个集合。Alice 和 Bob 轮流操作，每次 Alice 可以选中一堆总数在集合 A 中的石子，将它分成非空的两堆，Bob 同理。谁不能操作就算输，问最后谁能获胜。

Example

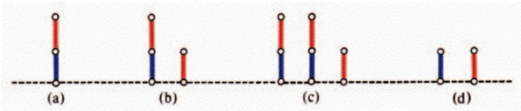
- 有一个 $1 \times n(n \leq 50)$ 的棋盘，每个格子都至多包含了一个棋子，棋子分成 A 和 B 两种，有些棋盘为空。所以这个棋盘可以用 AB. 三个字符表示。
- Alice 和 Bob 轮流开始玩游戏，Alice 可以选一个 A 棋子然后往左移一格，左边的棋子必须为空，Bob 同理，谁不能一定算输。
- 现在有一个由 AB.? 构成的 pattern，你可以将? 变成 AB. 中的任意一种，问有多少种方案可以使 Alice 获胜。

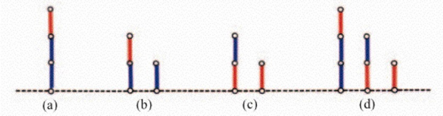
- 上面的两个游戏都是不平等博弈问题。
- 解决问题的关键是计算 Alice 能比 Bob 多走几步。如果这个值大于 0，那么 Alice 必胜。如果这个值小于 0，那么 Bob 必胜。否则后手必胜。
- 我们称这个为游戏的值。我们尝试把这个值推广到更加一般的情况。

Hackenbush

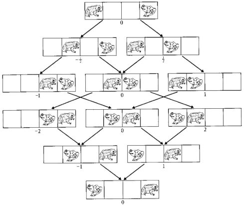
- 左边可以删除蓝色边或者绿色边，右边可以删除红色边或者绿色边，一旦一个联通块不和地面相连，那么从图中删除。左右两边轮流操作，谁不能操作算输。
- 

Half step

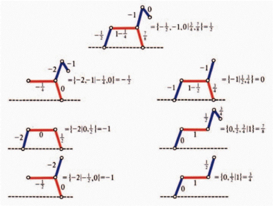
- 

- 

Definition

- 我们把游戏 G 写成 $G=\{G^L|G^R\}$，G^L 和 G^R 分别表示左边和右边操作后的游戏的集合，这里我们不区分游戏本身和游戏的值。
- 很容易得到下面等式 $\{n|n+1\}=n+\frac{1}{2}, \{n|\}=n+1(n), \{|\}=0, \{x|y\}=0, (x<0, y>0)$。
- 

Simplicity rule

- 如果 $G = \{L|R\}$，并且 $L < R$，那么 G 为 L 和 R 之间最简的数字。
- 一般来说，如果 L 到 R 之间有整数，那么为最靠近 0 的整数，否则为分母为 2 的幂次且分母最小的分数。
- 

Example

- 有 $n(n \leq 10^5)$ 块长宽都不超过 10^9 的整数的巧克力，Alice 只能横着切成两块长宽都为整数的巧克力，Bob 只能竖着切。这些巧克力不能旋转。谁不能动算输。
- 问谁能获胜。

<table>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>13</th><th>14</th><th>15</th><th>16</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>2</td><td>−1</td><td colspan="2" rowspan="2">0</td><td colspan="2" rowspan="2">1</td><td colspan="2" rowspan="2">2</td><td colspan="2" rowspan="2">3</td><td colspan="2" rowspan="2">4</td><td colspan="2" rowspan="2">5</td><td colspan="2" rowspan="2">6</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>3</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>−3</td><td colspan="2" rowspan="2">−1</td><td colspan="4" rowspan="4">0</td><td colspan="4" rowspan="4">1</td><td colspan="4" rowspan="4">2</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>5</td><td>−4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>−5</td><td colspan="2" rowspan="2">−2</td></tr>
<tr><td>7</td><td>−6</td></tr>
<tr><td>8</td><td>−7</td><td colspan="2" rowspan="2">−3</td><td colspan="4" rowspan="4">−1</td><td colspan="8" rowspan="6">0</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>9</td><td>−8</td></tr>
<tr><td>10</td><td>−9</td><td colspan="2" rowspan="2">−4</td></tr>
<tr><td>11</td><td>−10</td></tr>
<tr><td>12</td><td>−11</td><td colspan="2" rowspan="2">−5</td><td colspan="4" rowspan="2">−2</td></tr>
<tr><td>13</td><td>−12</td></tr>
</table>

Berlekamp's rule for hackenbush string

- 对于 L 开头的串，找到第一个 LR 的位置，然后这个 LR 前面的 L 的个数为整数部分，LR 变成小数点，LR 后面的部分，如果是 L 变成 1，是 R 就变成 0，然后在最后加上一个 1.
- $LLL\ LR\ LR = 3.101 = 3\frac{5}{8}$.
- 为了最优左和右都会砍最深的，然后进行简单归纳就能得到这个结论。

Generalize this rule to hackenbush tree

- 考虑如何把这个结果推广到树上，对于一个根节点，那么每个子树都是独立的，所以只需解决一个子树添上了一条 L 边即可。
- 可以归纳证明可以根据子树的值等价成一个字符串，然后用在用这个 rule 进行化简。
- 具体的如果 $x \geq 0$，那么直接加一即可。否则 x 的整数部分为 R 的数量，如果 x 有小数点那么把这个小数点展开成 LR，然后前面添加若干个 0，然后加上小数点。
- 小数数位不超过子树大小，所以高精度的时间复杂度是 $O(n \log n)$ 的。

Fuzzy position

- $G > 0$ 那么左边获胜，$G < 0$ 那么右边获胜，$G = 0$ 那么后手获胜。
- $G||0$ 记作 fuzzy，先手获胜。

Sum of game

- $G+H=\{G^L+H,G+H^L|G^R+H,G+H^R|\}$。
- 如果 G 和 H 都大于等于 0，那么 $G+H>=0$。
- 如果 G 大于等于 0，H 大于 0 或者 fuzzy，那么 $G+H$ 大于 0 或者 fuzzy。
- 加上 0 的游戏并不会影响结果。
- $-G=\{-G^R|-G^L\}$，$G\geq H$ 当且仅当 $G+(-H)\geq 0$。
- 对于 $G=\{A,B,C,\ldots|D,E,F,\ldots\}$，如果有 $A\leq B$，$D\leq E$，那么我们可以把 A 和 E 删除。

Star

- 考虑一个石子的 nim，那么 $G = \{0|0\}$，记作 $*$。
- 有如下等式 $* + * = 0, x + * = \{x|x\}$。
- 对于 nim，我们记作 $*n = \{*0, *1, \ldots, *(n-1) | *0, *1, \ldots, *(n-1)\}$。

Example

- 有一条长度为 $n(n \leq 10^5)$ 的纸带，上面有 A 和 B 两种，Alice 和 Bob 在空位里轮流填 A 和 B，要求不能有两个相邻的相同字母，谁不能填算输。
- 问 Alice 和 Bob 分别为先手的时候，谁能获胜。

Solution

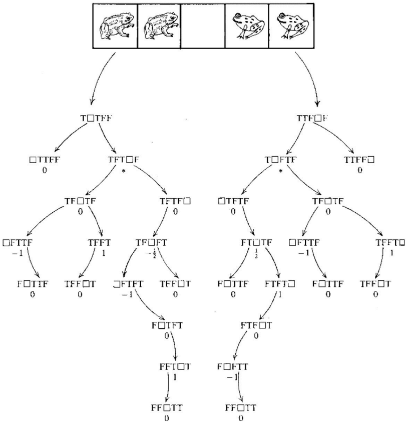
- 我们只需要计算出 LnR, LnL, RnR, Ln, Rn, n 这样的游戏的值，然后相加即可。
- $R5R = \{R3L + L0R, R2L + L1R | R1R + R2R\} = \{* + 0, 0 + 0 | 1 + 0\} = \{0, * | 1\} = \frac{1}{2}$。
-

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
LnL	–	0	-1	-1	$*$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$*$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{16}$	...
LnR = RnL	0	0	0	$*$	$*$	$*$	0	0	0	$*$	$*$	$*$	0	0	0	...
RnR	–	0	1	1	$*$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$*$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$	...

Bypass rule

- 令 $G = \{A, B, C, \dots | D, E, F, \dots\}$。
- 如果决策 D 存在某个左决策 $D^L \geq G$，那么可以把 D 换成 D^L 的所有右决策 $x, y, z, \dots$。

跳蛤


T□TFF
TTF□F
□TTFF
0
TFT□F
*
T□FTF
*
TTFF□
0
TF□TF
0
TFTF□
0
□TFTF
0
TF□TF
0
□FTTF
−1
TFFT
1
TF□FT
−½
FT□TF
½
□FTTF
−1
TFFT□
1
F□TTF
0
TFF□T
0
□FTFT
−1
TFF□T
0
F□TTF
0
FTFT□
1
F□TTF
0
TFF□T
0
F□TFT
0
FTF□T
0
FFT□T
1
F□FTT
−1
FF□TT
0
FF□TT
0

Up and down

- $T \cdot TFF = \{\cdot TTFF | TFT \cdot F\} = \{0|*\}$，记作 $\uparrow$。记 n 个 $\uparrow$ 的和为 $n\uparrow$。
- 左状态为 0，右状态为 $*$，所以这是必胜态。又因为 $*$ 小于任何正数，所以我们认为 $\uparrow$ 是个小于任意正实数的正数。
- $TT \cdot FF = \{\uparrow | \downarrow\} = \{\uparrow |0\} = \{0| \downarrow\} = \{0|0\} = *$。
- $\uparrow * = \uparrow + * = \{0 + *, \uparrow + * | * + *, \uparrow + 0\} = \{*, \uparrow |0, \uparrow\} = \{\uparrow, *|0\} = \{0, *|0\}$。
- $\{\uparrow | \uparrow\} = 0| \uparrow = 2\uparrow + *$。

Sum of numbers, stars, ups and downs

- $x + n\uparrow$ 当 $x \geq 0$ 或者 $x = 0$ 且 $n \geq 1$ 是为正。
- $x + n\uparrow + \star$ 当 $x \geq 0$ 或者 $x = 0$ 且 $n \geq 2$ 是为正。

Example

- 给出 $n(0 \leq n \leq 10^6)$ 个跳蛤的局面，你可以在这里面取出子集进行游戏。
- 分别统计左边必胜，右边必胜，先手必胜，后手必胜的子集数。

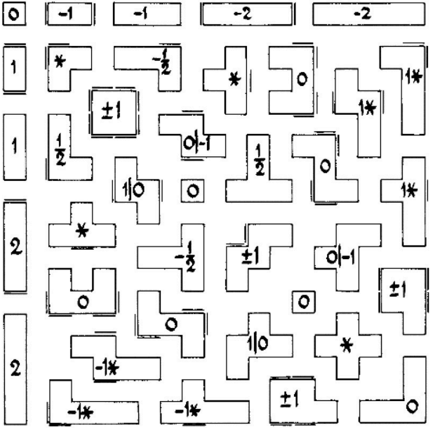
Solution

- 这些局面中数字只可能为 $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$，先考虑 number 为正的和负的方案。
- 对于数字为 0，根据 $\uparrow$ 个数和 * 的奇偶性分别分析。

Gift horses principle

- 如果 $H < G$ 或者 $H || G$，那么把 H 加入到 G^L 中不会影响 G 的取值。
- $2\uparrow + * = \{0 | \uparrow\} = \{\uparrow | \uparrow\} = \{2\uparrow | \uparrow\} = \{3\uparrow | \uparrow\}$。

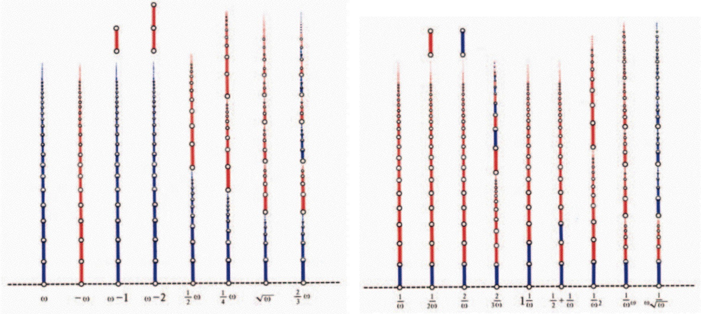
Dominoes

- 给一个棋盘，左只能放竖的骨牌，右只能放横的骨牌。
- 

Switches

- 一个 2×2 的棋盘的值为 $\{1|-1\}$，一个 2×3 的棋盘的值为 $\{2|-\frac{1}{2}\}$，记这样的游戏为 $\{x|y\}$，$x\geq y$。
- 对于 $z>x, z>\{x|y\}$。对于 $z<y$，$z<\{x|y\}$。对于 $x\leq z\leq y$，有 $z||\{x|y\}$。
- 对于数字 z，$\{x|y\}+z=\{x+z|y+z\}$，$\{x|y\}=u+\{v|-v\}=u\pm v$，其中 $u=\frac{1}{2}(x+y), v=\frac{1}{2}(x-y)$。我们把这样的 v 记作 $\{x|y\}$ 的温度。
- 对于一堆 switch，会按温度从大到小交替选择。
- 对于 $\{x|y\}+*=\{x*|y*\}(x\geq y), \{x|y*\}+*=\{x*|y\}(x>y)$。

The infinite ordinal numbers

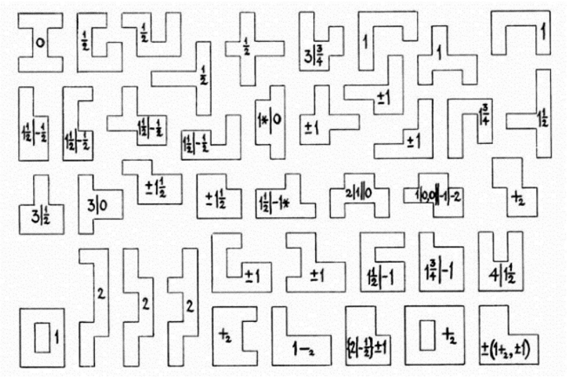


Example

- 有 $n(n \leq 10)$ 个长度不超过 50 的 01 串，包含最多一对括号。Alice 和 Bob 轮流操作。
- Alice 可以选择一个括号外的 0 然后把后面的串全部删除，或者是将括号内的串展开成任意多次，然后去除括号，并且选中展出来的一个 0，然后把后面的串删除。谁不能动算输。
- 问这个游戏 Alice 必胜或者 Bob 必胜或者后手必胜。

Solution

- 游戏本质是一个无限的 hackenbush，串是有限的情况很好计算。
- 如果有无穷个 1 前缀，那么这个串为 ω 加上括号后面形成的分数部分。
- 否则值一定是有限的，并且括号内可以展成等比数列求和，括号后面的 01 的数量级为 $\frac{1}{\omega}$。
- 首先比较 ω 项，然后比较常数项，最后比较 $\frac{1}{\omega}$ 项即可。

- 祝大家后天考试开心。
- 

Reference

- Berlekamp E R, Conway J H, Guy R K. Winning ways for your mathematical plays[M]. Natick: AK Peters, 2003.
- Conway J H. On numbers and games[M]. London: Academic press, 1976.